ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КЛЕРО В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ОБРАТНЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Задача нахождения особых (сингулярных) решений дифференциальных уравнений типа Клеро в частных производных представляет интерес при изучении различных преобразований нелинейных уравнений математической физики таких, например, как преобразования Лежандра. Уравнения данного типа являются значимыми в прикладных задачах теоретической физики. Например, в квантовой теории поля существует связь особого решения уравнения типа Клеро с эффективным действием для составных полей. В теории с составными полями однопетлевое эффективное действие определяется уравнением, содержащим неизвестный функционал и его вариационные производные, которое имеет вид уравнения типа Клеро. Целью настоящей статьи является нахождение условия существования особых решений для дифференциальных уравнений типа Клеро в частных производных, а также получение сингулярных решений для обратных тригонометрических функций. Поиск особых решений уравнений типа Клеро в частных производных для конкретных функций остается мало изученным и является перспективным научным направлением.

Материалы и методы. Представлен метод отыскания сингулярных решений уравнения типа Клеро в частных производных со специальным видом зависимости функции от частных производных на примере обратных тригонометрических функций. Суть метода заключается в сведении задачи нахождения частных производных искомой функции к задаче нахождения свертки частных производных искомой функции с фиксированными параметрами. Описанный метод применим для нахождения сингулярных решений уравнений типа Клеро, когда функция от производных искомой функции имеет специальный вид.

Результаты. Сформулирован критерий существования сингулярного решения дифференциального уравнения в частных производных типа Клеро для случая, когда функции от производных представляют собой обратные тригонометрические функции от линейных комбинаций частных производных. Полученные в настоящей работе сингулярные решения вычислены для случая произвольного количества переменных и являются основными результатами работы. Отмечается, что во всех рассмотренных случаях для данного выбора функции в уравнении удастся разрешить систему уравнений, определяющую особое решение.

Выводы. Дифференциальные уравнения типа Клеро представляют собой нелинейные уравнения в частных производных первого порядка и являются обобщением известного обыкновенного дифференциального уравнения Клеро. В работе описана проблема нахождения особого решения дифференциального

уравнения в частных производных типа Клеро для случая, когда функции от производных представляют собой одну из обратных тригонометрических функций. Обсуждаются условия существования особых решений и структура функции от производных, для которой описанный метод применим. Из курса дифференциальных уравнений известно, что сингулярные решения уравнений типа Клеро в частных производных не всегда существуют. Поэтому вопрос о нахождении конкретных функций от частных производных в уравнении, для которых особые решения существуют, остается открытым и представляет собой перспективное направление для дальнейшего изучения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, дифференциальные уравнения типа Клеро, особые (сингулярные) решения, обратные тригонометрические функции.

L. L. Ryskina, A. S. Zubtsova, Yu. O. Shavenkova

SINGULAR SOLUTIONS OF CLAIRAUT-TYPE EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES WITH REVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

Abstract.

Background. The problem of evaluation of the special (singular) solutions of Clairaut-type partial differential equations attracts a lot of interest studying various transformations of nonlinear equations of mathematical physics, for example, Legendre transformations. Also this type of equations are significant in applied problems of theoretical physics, for example, in quantum field theory there is a connection between a special solution of the Clairaut-type equation and an effective action for composite fields. In a theory with composite fields, a one-loop effective action is determined by an equation containing an unknown nonlinear functional and its variational derivatives, which has the Clairaut-type form. The aim of this article is to find the conditions for the existence of singular solutions for the Clairaut-type partial differential equations, as well as, to obtain singular solutions for inverse trigonometric functions. The search of the special solutions of Clairaut-type partial differential equations for certain functions of derivatives in the equations remains poorly studied and is an interesting scientific field.

Materials and methods. A method is proposed for finding singular solutions of the Clairaut-type equation with a certain function on partial derivatives, using the inverse trigonometric functions as an example. The the method is to reduce the problem of finding partial derivatives of the decision function to the problem of finding convolutions of partial derivatives of the decision function with fixed parameters. The described method is applicable for finding singular solutions of the Clairaut-type equations when the function of the derivatives of the decision function has a special form.

Results. We formulate a criterion for the existence of a singular solution of the Clairaut-type partial differential equation for the case when the functions of the derivatives are the inverse trigonometric functions of linear combinations of partial derivatives. The singular solutions obtained in this paper were calculated for the case of an arbitrary number of variables, and present the main results of the paper. It is noted that in all considered cases, for a given choice of function in the equation, it is possible to solve a system that defines a singular solution of the differential equation.

Conclusions. Differential equation of the Clairaut-type is a nonlinear partial differential equations of the first order. This equation is a generalization of the well-known ordinary differential Clairaut equation. The paper describes the problem of

finding a singular solution to a Clairaut-type partial differential equation for the case when the functions of the derivatives are inverse trigonometric functions. We discuss the conditions for the existence of the singular solutions and the structure of a function of derivatives for which the described method is applicable. From the course of differential equations, it is known that singular solutions of Clairaut-type partial differential equations do not always exist. Therefore, the question of finding specific functions of partial derivatives in an equation for which special solutions exist remains open and represents a promising area for further study.

Keywords: partial differential equations, Clairaut-type equations, singular solutions, inverse trigonometric functions

Введение

Рассматривается задача нахождения особых (сингулярных) решений для многомерного обобщения дифференциального уравнения в частных производных типа Клеро. В аспекте данной проблематики особое внимание привлекают работы [1–4], в которых обсуждалось приложение уравнений типа Клеро к задачам механики, хромодинамики и квантовой теории поля. Также в рамках выбранного предмета исследования интерес представляют статьи [5–8], в которых описана проблема отыскания различных решений для дифференциальных уравнений типа Клеро.

Представленная статья продолжает цикл работ [9–11], посвященных нахождению особых решений для уравнений типа Клеро. Исследование дифференциальных уравнений типа Клеро осложняется тем, что отсутствует общий алгоритм нахождения сингулярных решений, можно лишь говорить об удачном подборе функции от производных. Результаты, представленные в работе, позволяют расширить класс функций, для которых удастся найти сингулярное решение. В работе представлены сингулярные решения уравнений типа Клеро для случая, когда правая часть уравнений имеет вид обратных тригонометрических функций от произведения n -независимых переменных.

1. Материал и методика

Дифференциальным уравнением типа Клеро называется уравнение первого порядка в частных производных [1, 2, 4, 7–11] вида

$$y - \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} x^i = \psi \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь искомая функция $y = y(x)$ – действительная функция от переменных, $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а ψ – заданная функция, n раз непрерывно дифференцируемая по своим переменным. Введем обозначения: $\frac{\partial y}{\partial x_i} = z_i$.

Следуя работам [1, 4], сделаем предположение о структуре функции ψ ; пусть

$$\psi(z_i) = \psi \left(\sum_{i=1}^n a^i z_i \right), \quad (2)$$

тогда уравнение (1), с учетом предположения (2) примет вид

$$y - \sum_{i=1}^n x^i z_i = \psi \left(\sum_{i=1}^n a^i z_i \right). \quad (3)$$

Из дифференциального уравнения (3) получаем систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^n (\psi' \cdot a_j + x_j) \frac{\partial z_j}{\partial x_i} = 0, \quad (4)$$

где обозначено

$$\psi' = \psi'(a^i z_i) = \frac{d\psi(a^i z_i)}{d(a^i z_i)}.$$

Из уравнения (4) получаем два решения:

1) для случая $\frac{\partial z_j}{\partial x_i} \equiv 0$ получаем решение системы (4) вида $z_i(x) = c_i$.

Тогда решение дифференциального уравнения (1) определяет семейство линейных функций

$$y(x) = \sum_{i=1}^n x^i c_i + \psi(c_i), \quad (5)$$

где введено обозначение $c_i = \{c_1, c_2, \dots, c_n\} = \text{const}$;

2) для случая, когда все элементы $\frac{\partial z_j}{\partial x_i} \neq 0$ образуют невырожденную матрицу, систему уравнений

$$\psi' \cdot a_j + x_j = 0 \quad (6)$$

можно рассматривать как условие для определения всех функций $z_i = z_i(x)$. Однако для нахождения сингулярных решений достаточно найти не саму функцию ψ , а свертки $\sum_{i=1}^n x^i z_i$ и $\sum_{i=1}^n a^i z_i$.

Пусть существуют параметры $b_i, i=1, \dots, n$, такие, что $\sum_{i=1}^n a^i b_i = 1$. Сворачиваем выражение $\psi' \cdot a_j + x_j = 0$ с параметром b_j , получаем

$$\left(\sum_{i=1}^n a^i z_i \right) = \varphi^{-1} \left(- \sum_{i=1}^n x^i b_i \right), \quad (7)$$

тогда $\sum_{i=1}^n a^i z_i$ – обратная функция для функции $\psi' \left(\sum_{i=1}^n a^i z_i \right)$.

Найдем свертку $\sum_{i=1}^n x^i z_i$, для этого подставим значение в выражение для $\sum_{i=1}^n a^i z_i$ во второе уравнение, получим

$$\sum_{i=1}^n x^i z_i = -\sum_{i=1}^n a^i z_i \cdot \psi' \left(\sum_{i=1}^n a^i z_i \right). \quad (8)$$

Таким образом, получили выражения для свертки функций $z_i = z_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a^i z_i = \varphi^{-1} \left(-\sum_{i=1}^n x^i b_i \right), \\ \sum_{i=1}^n x^i z_i = -\sum_{i=1}^n a^i z_i \cdot \psi' \left(\sum_{i=1}^n a^i z_i \right). \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя выражения (9) в (3), получим особое решение уравнения типа Клеро (1):

$$y = \sum_{i=1}^n x^i z_i + \psi \left(\sum_{i=1}^n a^i z_i \right). \quad (10)$$

Особое решение (10) с учетом выражений (9) уравнения Клеро (1) для случая, когда функция от производных имеет структуру (2), было получено в недавней работе [1]. В работах [2, 4, 7–11], были получены **сингулярные решения для многомерных дифференциальных уравнений типа Клеро в частных производных со степенной, показательной и логарифмической функциями**. В данной работе поставлена задача поиска сингулярного решения уравнений типа Клеро для случая, когда функция ψ имеет вид обратных тригонометрических функций.

2. Нахождение сингулярных решений для обратных тригонометрических функций

2.1. Функция арккосинус от произведения частных производных

Выберем в качестве функции $\psi = \psi(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ функцию арккосинус, зависящую от линейной комбинации произвольного числа независимых переменных:

$$\psi(z) = \arccos(a^i z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Здесь и далее будем подразумевать суммирование по повторяющимся индексам. Для функции ψ вида (11) система уравнений (6) будет иметь следующий вид:

$$-\frac{a^j}{\sqrt{1-(a^i z_i)^2}} + x^j = 0. \quad (12)$$

Система уравнений (12) представляет собой систему алгебраических уравнений для определения сверток функций z_i с параметрами a^i и переменными x^i . Следуя общему методу [1, 4], введем параметры b_j . Предполагаем, что такие параметры существуют и удовлетворяют следующему условию: $\sum_{j=1}^n b_j a^j = 1$. Используя определяющие свойства параметров b_j , умножим каждое уравнение из системы (12) на соответствующий параметр b_j и просуммируем. Получим уравнение

$$-\frac{1}{\sqrt{1-(a^i z_i)^2}} + b_j x^j = 0. \quad (13)$$

Из уравнения (8) необходимо выразить свертку неизвестных функций z_i с параметрами a^i . Получим следующее выражение:

$$a^i z_i = \sqrt{1 - \frac{1}{(b_j x^j)^2}}. \quad (14)$$

Далее умножим каждое из уравнений системы (12) на соответствующую функцию z_i и возьмем сумму полученных выражений. Получим уравнение, содержащее искомую свертку $x^i z_i$. Подставим полученное уравнение в найденное ранее выражение (14) для свертки $a^i z_i$ и окончательно выразим $x^i z_i$, как функцию переменных x_i и параметров b_i

$$x^i z_i = \sqrt{(b_j x^j)^2 - 1}. \quad (15)$$

Для получения особого решения уравнения типа Клеро (1) с функцией от производных вида (11) необходимо подставить значение сверток $a^i z_i$ и $x^i z_i$, (14) и (15) соответственно в выражение (10). Окончательно получим

$$y(x) = \sqrt{(b_j x^j)^2 - 1} + \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{(b_j x^j)^2}}. \quad (16)$$

Выражение (16) представляет собой особое решение уравнения в частных производных типа Клеро (1) для случая, когда функция от частных производных ψ имеет вид (11). Отметим, что полученное решение справедливо для любого количества независимых переменных в исходном уравнении.

2.2. Функция арксинус от произведения частных производных

Теперь в качестве функции $\psi = \psi(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, выберем функцию арксинус, также зависящую от линейной комбинации произвольного числа независимых переменных:

$$\psi(z) = -\arcsin(a^i z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Для функции ψ вида (17) система уравнений (6) будет иметь следующий вид:

$$-\frac{a^j}{\sqrt{1-(a^i z_i)^2}} + x^j = 0. \quad (18)$$

Следуя методу, описанному в [1, 4], аналогично описанному выше случаю, вводим параметры b_j . Умножаем каждое уравнение из системы (18) на соответствующий параметр b_j и просуммируем. Получим уравнение

$$-\frac{1}{\sqrt{1-(a^i z_i)^2}} + b_j x^j = 0. \quad (19)$$

Выражаем свертку $a^i z_i$:

$$a^i z_i = \sqrt{1 - \frac{1}{(b_j x^j)^2}}. \quad (20)$$

Далее получаем уравнение, содержащее искомую свертку $x^i z_i$. Для этого подставим полученное уравнение в выражение для свертки $a^i z_i$ и выразим $x^i z_i$ как функцию переменных x_i и параметров b_i :

$$x^i z_i = \sqrt{(b_j x^j)^2 - 1}. \quad (21)$$

Таким образом, для получения особого решения уравнения типа Клеро (1) с функцией от производных вида (17) необходимо подставить значение свертки $a^i z_i$ и $x^i z_i$, (20) и (21) соответственно в выражение (17). Окончательно получим

$$y(x) = \sqrt{(b_j x^j)^2 - 1} + \arcsin \sqrt{1 - \frac{1}{(b_j x^j)^2}}. \quad (22)$$

Полученное выражение (22) представляет собой особое решение уравнения в частных производных типа Клеро (1) для случая, когда функция от

частных производных ψ имеет вид (17), выражение (22) также справедливо для любого количества независимых переменных в исходном уравнении.

2.3. Функция арктангенс от произведения частных производных

Выберем в качестве функции $\psi = \psi(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, функцию арктангенс:

$$\psi(z) = -\operatorname{arctg}(a^i z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

Для функции ψ вида (23) система уравнений (6) будет иметь вид

$$-\frac{a^j}{1 + (a^i z_i)^2} + x^j = 0. \quad (24)$$

Система уравнений (24) представляет собой систему алгебраических уравнений для определения сверток $a^i z_i$ и $x^i z_i$. Домножаем каждое уравнение из системы (24) на соответствующий параметр b_j и просуммируем:

$$-\frac{1}{1 + (a^i z_i)^2} + b_j x^j = 0. \quad (25)$$

Выражение для свертки $a^i z_i$ имеет следующий вид:

$$a^i z_i = \sqrt{\frac{1}{b_j x^j} - 1}. \quad (26)$$

Далее умножим каждое из уравнений системы (24) на соответствующую функцию z_i и возьмем сумму полученных выражений. В итоге имеем уравнение, содержащее искомую свертку $x^i z_i$. Подставим его в выражение (26) и выразим свертку $x^i z_i$ как функцию переменных x_i и параметров b_i :

$$x^i z_i = \sqrt{b_j x^j (1 - b_j x^j)}. \quad (27)$$

Для получения особого решения уравнения типа Клеро (1) с функцией от производных вида (23) необходимо подставить значение сверток $a^i z_i$ и $x^i z_i$, (26) и (27) соответственно в выражение (10). Окончательно получим

$$y(x) = \sqrt{b_j x^j (1 - b_j x^j)} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{b_j x^j} - 1}. \quad (28)$$

Выражение (28) представляет собой особое решение уравнения в частных производных типа Клеро (1) для случая, когда функция от частных производных ψ имеет вид (23). Полученное решение справедливо для любого количества независимых переменных в исходном уравнении.

Заключение

Из курса дифференциальных уравнений известно, что сингулярные решения уравнений типа Клеро в частных производных не всегда существуют, поэтому в настоящей работе сформулирован критерий существования таких решений. В качестве основного результата работы приведены сингулярные решения для обратных тригонометрических функций (16), (22), (28), описывающих случай произвольного количества переменных. Показано, что для данного выбора функций в уравнении удастся разрешить систему уравнений, определяющую существование сингулярного решения.

Библиографический список

1. **Zyryanova, O. V.** On singular solutions to Clairaut-type equations / O. V. Zyryanova, V. I. Mudruk // *Modern Physics Letters A.* – 2019. – Vol. 34, № 32. – P. 1950258–1950269.
2. **Zyryanova, O. V.** Singular solution of Clairaut equations / O. V. Zyryanova, V. I. Mudruk // *Russian Physics Journal.* – 2018. – Vol. 61, № 4. – P. 635–642.
3. **Walker, M. L.** Cho-Duan-Ge decomposition of QCD in the constraintless Clairaut-type formalism / M. L. Walker, S. Duplij // *Phys.Rev.* – 2015. – Vol. 92 (D). – P. 064022.
4. **Lavrov, P. M.** Legendre transformations and Clairaut-type equations / P. M. Lavrov, B. S. Merzlikin // *Physics Letters.* – 2016. – Vol. 756 (B). – P.188–193.
5. **Рахмелевич, И. В.** О решениях многомерного уравнения Клеро с мультиоднородной функцией от производных / И. В. Рахмелевич // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика.* – 2014. – Т. 14, № 4. – С. 374–381.
6. **Duplij, S.** A new Hamiltonian formalism for singular Lagrangian theories / S. Duplij // *Particles and Fields. ser. Nuclei.* – 2011. – Т. 969, № 34–39.
7. **Zyryanova, O. V.** One-Loop Effective Action with Composite Fields in Gauge Theories / O. V. Zyryanova, O. V. Kolesnikov // *Russian Physics Journal.* – 2017. – Vol. 61, № 10. – P. 126–131.
8. **Lavrov, P. M.** Loop expansion of the average effective action in the functional renormalization group approach / P. M. Lavrov, B. S. Merzlikin // *Phys. Rev.* – 2015. – Vol. 8 (D92). – P. 085038.
9. **Рыскина, Л. Л.** Дифференциальное уравнение типа Клеро в частных производных со степенной функцией / Л. Л. Рыскина, Л. А. Жидова // *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика.* – 2019. – № 1. – С. 41–48.
10. **Рыскина, Л. Л.** Решение дифференциальных уравнений Клеро в частных производных с логарифмической функцией / Л. Л. Рыскина, Л. А. Жидова // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.* – 2019. – № 2 (50). – С. 28–35.
11. **Рыскина, Л. Л.** О сингулярных решениях многомерного дифференциального уравнения типа Клеро со степенной и показательной функциями / Л. Л. Рыскина // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки.* – 2019. – Т. 23, № 2. – С. 394–401.

References

1. Zyryanova O. V., Mudruk V. I. *Modern Physics Letters A.* 2019, vol. 34, no. 32, pp. 1950258–1950269.
2. Zyryanova O. V., Mudruk V. I. *Russian Physics Journal.* 2018, vol. 61, no. 4, pp. 635–642.

3. Walker M. L., Duplij S. *Phys.Rev.* 2015, vol. 92 (D), p. 064022.
4. Lavrov P. M., Merzlikin B. S. *Physics Letters.* 2016, vol. 756 (B), pp.188–193.
5. Rakhmelevich I. V. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Ser.: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Proceedings of Saratov University. New series: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2014, vol. 14, no. 4, pp. 374–381. [In Russian]
6. Duplij S. *Particles and Fields. ser. Nuclei.* 2011, vol. 969, no. 34–39.
7. Zyryanova O. V., Kolesnikov O. V. *Russian Physics Journal.* 2017, vol. 61, no. 10, pp. 126–131.
8. Lavrov P. M., Merzlikin B. S. *Phys. Rev.* 2015, vol. 8 (D92), p. 085038.
9. Ryskina L. L., Zhidova L. A. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika* [Bulletin of Buryat State University. Mathematics. Informatics]. 2019, no. 1, pp. 41–48. [In Russian]
10. Ryskina L. L., Zhidova L. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2019, no. 2 (50), pp. 28–35. [In Russian]
11. Ryskina L. L. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of Samara State Technical University. Series: Physical and mathematical sciences]. 2019, vol. 23, no. 2, pp. 394–401. [In Russian]

Рыскина Лилия Леонидовна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математического
анализа, Томский государственный
педагогический университет (Россия,
г. Томск, ул. Киевская, 60)

E-mail: ryskina@tspu.edu.ru

Ryskina Liliya Leonidovna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, sub-
department of mathematical analysis,
Tomsk State Pedagogical University (60,
Kievskaya street, Tomsk, Russia)

Зубцова Анастасия Сергеевна

студентка, Томский государственный
педагогический университет
(Россия, г. Томск, ул. Киевская, 60)

E-mail: zubtzova.n@yandex.ru

Zubtsova Anastasiya Sergeevna

Student, Tomsk State Pedagogical
University (60, Kievskaya street,
Tomsk, Russia)

Шавенкова Юлия Олеговна

студентка, Томский государственный
педагогический университет
(Россия, г. Томск, ул. Киевская, 60)

E-mail: shavenkova1998@mail.ru

Shavenkova Yuliya Olegovna

Student, Tomsk State Pedagogical
University (60, Kievskaya street,
Tomsk, Russia)

Образец цитирования:

Рыскина, Л. Л. Особые решения уравнений типа Клеро в частных производных с обратными тригонометрическими функциями / Л. Л. Рыскина, А. С. Зубцова, Ю. О. Шавенкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 1 (53). – С. 51–60. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-4.